証券売買への保険付帯による購入者の市場での行動

The Securities with Insurance and the Behavior of Traders

上　野　皓　司
Ueno,　Koji

ABSTRACT

The trader sells securities with insurance by different prices from them without insurance. The premium of insurance affects the sales price by raising the cost of trade and changing the judgement of return. If market price rises over the price by which the trader decides the sale of securities within the insured term, both the insurance company and the trader get the profits.

How should the probability of such price within the insured term be calculated? The action of trader and the probability of sales according to market price are examined.

Black and Scholes（1973）はシカゴ・オプション取引所（CBOE）が開設されオプションの取引が開始された1973年に，コール・オプションの適正な価格の評価方法を提示している，それまでに既に論議されていた社債の新株引受権ワラント（warrants）についての Sprenkle, Ayres, Boness, Samuelson, Baumol, Chen 等の研究を参考に，株価の期待収益には無関係な評価方法を示した(1)。株価と行使価格との差異が本質的価値（intrinsic value），行使日までの時間の長さに対応した価値が時間価値（time value）であり，満期日（expiration date, maturity date）までの各時点で計算されている。

オプション取引は株式や為替等の金融商品のみではなく資源や不動産等の実質資産についても行うことができる。Quigg（1993）は都市部の土地について検

討を行っているが，これまでに石油等の資源についても行われている。オプションは原資産売買の保険であるのみではなく低コストで原資産を売買するレバッジとしての機能をも持っている。

シカゴ・オプション取引所（CBOE）は1997年時点で680銘柄以上の個別株オプションを上場し，1日約30万単位が取引されている。これは株数換算でニューヨーク証券取引所の株式取引高の15～20％に当たる。オプション1単位は通常原株100株に対応している。限月は4限月で（1，4，7，10)，(2，5，8，11)，(3，6，9，12）の三種類の限月サイクルがある。

現時点の株式やオプションが将来どのような収益をもたらすかは投資家にとっては最大の関心事であるが，米国ではこれらの評価や格付けをサービスにする機関や企業が存在する。オプション評価で著名なValue Lineはその影響力が大きいことで知られているが，Broughton and Chance（1993）はその実績（performance）を検討している。

Conrad（1989）は米国でのオプション導入による原資産への影響を1974から1980年まで調査し，個別株への導入は原資産株価の恒久的な上昇をもたらす，と分析している。またSorescu（2000）には，1973年にオプションが導入されて以来原資産の株価にどのような影響が生じたかについての多数の研究の概観が見られる。

（1）価格は株価と行使価格（exercise price, striking price）の差額である本質的価値と行使時までの時間的な長さによる時間価値の両者によって決まるという視点から，オプションの価値を株価 x と行使時までの時間 t により $w(x,\ t)$ と表し，ヘッジのための価格を

$$w(x,\ t)=xN(d_1)-ce^{r(t-t^*)}N(d_2),$$
$$d_1=\{Lnx/c+(r+0.5v^2)(t^*-t)\}/(v\sqrt{t^*-t}),$$
$$d_2=\{Lnx/c+(r-0.5v^2)(t^*-t)\}/(v\sqrt{t^*-t}),$$

と計算している。ここで t^* は権利行使時（expiration date, maturity date)，c は行使価格，v^2 は株価の収益の分散（variance rate)，r は利子率，e は自然対数の底，L_n は自然対数，$N(d)$ は正規分布の密度関数である。この評価は以下のような仮定に基づいている。(1)利子率が一定，(2)株価の分布は常に対数正規分布で株価の収益の分散は一定，(3)株式の配当や分配は行われない，(4)オプションはヨーロピアン型（European）で満期日にのみ行使される，(5)株式やオプションの取引費用（transaction cost）は存在しない，(6)債券購入のための一定利子での借入れは常に可能，(7)債券の売買は自由。

株式市場での個人や機関投資家の売買や保有の要因として，一般的には損失を顕在化させることへの嫌悪や，誤った信念，過信，賭博性向，等が上げられている。Grinblatt, and Keloharju（2001）はフィンランド株式市場での毎日の行動調査の資料により，特に損失を顕在化させることへの嫌気や，過去の収益，月間の高値安値等の歴史的な価格パターン，を行動要因として抽出している。また人生初期に相続した株式の売却，中年期の購入，老年期の売却，といったライフ・サイクル取引（life-cycle trading）も部分的にみられると述べている。オプションや保険契約が本格化すれば，売買や保有の要因にリスクの減少や安心感が加わることが考えられる。

日本では 1997 年にオプション市場が開設されたが，経済情勢等により現時点ではさほど活況を呈していない。以下ではオプション売買は考慮せず，その前段階としての株式への保険契約が株式購入者の市場での行動にどのような変化を引き起こすか，保険団体はどのような視点で保険料を設定するべきか，保険金請求の可能性はどのようにして予想されることができるか，を考える。

1. 価格の状況による購入者の市場での行動

株式の購入者は価格の動きによって利益が発生すれば売却するが，保険契約をしていれば無保険者とは異なった価格で売却する。以下では保険期間終期とそれ以前の期間内とにわけて，価格に対応する保険契約者と無保険者の市場での行動を考える。

1－1. 保険期間内の行動

保険期間の最初を $t_0=0$，保険期間終了時点を $t_1=T$，保険期間中の任意の時点を $0 \leqq t \leqq T$ と表せば，t 時点に価格がどのような状況にあるかによって購入者が売却するかどうかが決められる。ここでは証券数の部分売却は考えず，すべてを売却するかどうかが判断される。t 時点の売却は，手数料や税を含めた売買費用と保険費用のすべてが回収される場合にのみ行われると考える。したがっ

て価格がかなり上昇していなければならない。また手数料や税は売却時点に一括して支払われると仮定する。

0時点の購入価格と購入数量を p_0, q_0, t 時点の購入価格と購入数量を p_t, q_t, t 時点の税や手数料等の売買費用を h_t, 保険期間終了時点の購入価格と購入数量を p_T, q_T と表す。もし売買費用が売却金額の一定値 λ であれば，$h_t=\lambda p_t q_t$ であり，明確化のために，以下では売却時点 t にすべての売買費用が課せられ，$h_t=\lambda p_t q_t$ であると仮定する。また購入数量のすべての売却を仮定しているために，初期時点0に p_0, の価格で q_0 購入し，その購入分を期間内のいつ売却するかだけが問題になるために，数量は常に q_0 で一定であり，価格の変化だけが分析対象になる。以下では初期時点の購入分 p_0q_0 にだけ着目し，検討する。

1－1－1. 保険契約者の市場での行動

保険期間内の価格の上昇は，購入者に売却の機会を生み出すが，売却時に t 時点の税や手数料等の売買費用 $h_t=\lambda p_t q_0$ および保険費用 c_0 の回収が必要になるために，

$$(p_0q_0+\lambda p_t q_0+c_0)\leqq p_t q_0$$

が期間内の市場での売却が可能になる条件である。もし

$$(p_0q_0+\lambda p_t q_0)<p_t q_0<(p_0q_0+\lambda p_t q_0+c_0)$$

であれば，保険契約を実行しても $(p_0q_0-c_0)$ の回収しかなく $-c_0$ の損失となり，市場で売却すれば，$(p_tq_0-\lambda p_tq_0-c_0)$ が得られるが，$(p_tq_0-\lambda p_tq_0-c_0)<p_0q_0$ であるために，$\{(p_tq_0-\lambda p_tq_0-c_0)-p_0q_0\}$ の損失が発生する。価格が上昇しても，$(p_0q_0+\lambda p_tq_0+c_0)\leqq p_tq_0$ までは市場で売却できない。

$$(p_0q_0+\lambda p_t q_0)<p_t q_0<(p_0q_0+\lambda p_t q_0+c_0)$$

のとき，損失を覚悟で売却しなけばならない状況にあれば，保険契約を実行するのが有利か，市場で売却するのが有利かは，$\{(p_tq_0-\lambda p_tq_0-c_0)-p_0q_0\}$ と $-c_0$ の大小に依存し $\{(p_tq_0-\lambda p_tq_0-c_0)-p_0q_0\}$ が $-c_0$ より小さければ，保険契約を実行するのが有利で，大きければ，市場で売却するのが有利である。ただし以下で

は保険期間内の損失を伴う売却は考えず，保険契約の履行は常に $-c_0$ の損失を伴うために，契約の履行は期限の最終時点でのみ行われると仮定する。したがって期間内は，保険契約者にとっては，「市場で利益を得る売却」のみが唯一の行動である。

1－1－2. 無保険者の市場での行動

保険をかけていない購入者が t 時点に売却可能な条件は，

$$(p_t q_0 - \lambda p_t q_0) > p_0 q_0$$

である。このときの利益は，$\{(p_t q_0 - \lambda p_t q_0) - p_0 q_0\}$ である。保険付帯者のこのときの損益は，$\{(p_t q_0 - \lambda p_t q_0 - c_0) - p_0 q_0\}$ で，$p_t q_0 \geqq (p_0 q_0 + \lambda p_t q_0 + c_0)$ の状況が生じなければ，無保険者には利益が生じても，保険契約者には損失が発生する。$(p_0 q_0 + \lambda p_t q_0) < p_t q_0 < (p_0 q_0 + \lambda p_t q_0 + c_0)$ は，保険契約者には損失が生じ売却ができず，無保険者には利益が生じ売却可能な価格帯であり，「保険による売却拘束価格帯」である。

1－1－3. 保険契約者と無保険者の市場での行動の差異

以下では無保険者も損失を覚悟で保険期間内に売却することはなく，保険期間内に一定額 π の利益が発生すれば，保険契約者と無保険者のいずれもが即座に市場で売却すると仮定する。したがってこの条件のもとでは保険契約者に売却機会が生じるのは，価格が

$$(p_0 q_0 + \lambda p_t q_0 + c_0 + \pi) \leqq p_t q_0$$

のときで，無保険者に売却機会が生じるのは，価格が

$$(p_0 q_0 + \lambda p_t q_0 + \pi) \leqq p_t q_0$$

のときである。もし価格が

$$(p_0 q_0 + \lambda p_t q_0 + \pi) < p_t q_0 < (p_0 q_0 + \lambda p_t q_0 + c_0 + \pi)$$

であれば，無保険者には売却機会であるが，保険契約者には売却機会ではない。したがってこの価格帯は，「利益額による保険契約者への売却拘束価格帯」であ

る。

保険期間内に価格が上昇すれば，無保険者は保険契約者にくらべ売却機会が増え，利益額が大きくなるために，より有利な状況になる。(2)

1－2. 保険期間終期の行動

保険期間の終期には価格 p_T によって損益に差異が生じる。購入分をそのまま連続的に保持することも可能であるが，資金状況等により以下ではすべて処分するさいの損益を考える。

1－2－1. 保険契約者の行動

最終時点 T の価格 p_T が

$$(p_0q_0+\lambda p_Tq_0+c_0) \leqq p_Tq_0$$

の状況になれば，保険付帯者は市場で売却し，$\{(p_Tq_0-(p_0q_0+\lambda p_Tq_0+c_0)\}$ の利益を得る。もし価格 p_T が

$$(p_0q_0+\lambda p_Tq_0) \leqq p_Tq_0 < (p_0q_0+\lambda p_Tq_0+c_0)$$

の状況にあれば，契約を実行することなく市場で売却し，

$$p_Tq_0-(p_0q_0+\lambda p_Tq_0+c_0)$$

の損失を生じる。もし価格 p_T が

$$p_Tq_0 < (p_0q_0+\lambda p_Tq_0),$$

すなわち

$$p_Tq_0-\lambda p_Tq_0 < p_0q_0$$

であれば，契約を実行し，$-c_0$ の損失を生じる。

したがって，最終的には，① $\{p_Tq_0-(p_0q_0+\lambda p_Tq_0+c_0)\}$ の利益，② $\{p_Tq_0-$

（2）期間の長さを考慮するさいは市場や経済環境についてはどのような側面に着目すればよいであろうか。Bakshi, Cao, and Chen（2000）はオプションの長期と短期の動きの差異を将来の利子率や原資産等のランダムな飛躍を考慮して検討しているが，一般的な保険をかけるさいにも，長期と短期で証券価格や投資コストの重要な部分を占める利子率がどのように変化するかは注目すべき点である。

$(p_0q_0+\lambda p_Tq_0+c_0)\}$ の損失，③保険費用 $-c_0$ の損失，のいずれかになる。

1－2－2. 無保険者の行動

最終時点 T の価格 p_T が

$$(p_0q_0+\lambda p_Tq_0) \leqq p_Tq_0$$

の状況にあれば，無保険者は市場で売却し，$\{p_Tq_0-(p_0q_0+\lambda p_Tq_0)\}$ の利益を得る。もし価格 p_T が

$$p_Tq_0 < (p_0q_0+\lambda p_Tq_0)$$

であれば，無保険者には $\{p_Tq_0-(p_0q_0+\lambda p_Tq_0)\}$ の損失が発生する。したがって，最終的には，無保険者には，① $\{p_Tq_0-(p_0q_0+\lambda p_Tq_0)\}$ の利益，② $\{p_Tq_0-(p_0q_0+\lambda p_Tq_0)\}$ の損失，のいずれかが生じる。

1－2－3. 保険契約者と無保険者の保険期間終期の損益の差異

最終時点 T の価格 p_T が

$$(p_0q_0+\lambda p_Tq_0+c_0) \leqq p_Tq_0$$

であれば，保険契約者は市場で売却し，$\{p_Tq_0-(p_0q_0+\lambda p_Tq_0+c_0)\}$ の利益を得る。また無保険者も $\{p_Tq_0-(p_0q_0+\lambda p_Tq_0)\}$ の利益を得，無保険者の利益は保険契約者の利益より大きくなる。

価格 p_T が

$$(p_0q_0+\lambda p_Tq_0) \leqq p_Tq_0 < (p_0q_0+\lambda p_Tq_0+c_0)$$

の状況にあれば，保険契約者は契約を実行することなく市場で売却し，$p_Tq_0-(p_0q_0+\lambda p_Tq_0+c_0)$ の損失を生じる。しかし無保険者は $p_Tq_0-(p_0q_0+\lambda p_Tq_0)$ の利益を得る。

価格 p_T が

$$p_Tq_0 < (p_0q_0+\lambda p_Tq_0),$$

すなわち

$$p_Tq_0-\lambda p_Tq_0 < p_0q_0$$

であれば，保険契約者は契約を実行し，$-c_0$ の損失を生じる。他方無保険者は $p_Tq_0-(p_0q_0+\lambda p_Tq_0)$ の損失を生じる。このとき $-c_0$ が $p_Tq_0-(p_0q_0+\lambda p_Tq_0)$ より小さければ，無保険者の損失は保険契約者の損失より小さいが，大きければ無保険者の損失は保険契約者の損失より大きくなる。

したがって価格 p_T が $(p_0q_0+\lambda p_Tq_0) \leqq p_Tq_0$ の状況を生じる以上に高ければ，無保険者には常に利益が生じ，保険契約者より有利である。また

$$p_Tq_0-\lambda p_Tq_0 < p_0q_0$$

の価格でも

$$p_Tq_0-(p_0q_0+\lambda p_Tq_0) > -c_0$$

であれば，いずれにも損失が生じるが，無保険者の損失は少なく，なお無保険者が有利である。しかし価格が

$$-c_0 > p_Tq_0-(p_0q_0+\lambda p_Tq_0)$$

の状況になれば，無保険者の損失はより大きくなる。価格が

$$-c_0 = p_Tq_0-(p_0q_0+\lambda p_Tq_0) \tag{A}$$

の状況の水準よりさらに低下すれば，保険契約者の損失は $-c_0$ で一定となるのに対し，無保険者の損失は $-c_0$ からさらに増大して行く。したがって（A）は保険契約者と無保険者の損失に差異が生じる分岐点であり，初期時点 0 に保険契約を行うかどうかの判断の基準になる価格である。この価格を p^*_T と表示すれば，

$$-c_0 = p^*_Tq_0-(p_0q_0+\lambda p^*_Tq_0) \tag{B}$$

の関係が成立し[(3)]，

$$p^*_T = (p_0q_0-c_0)／q_0(1-\lambda) \tag{C}$$

である。したがって初期時点に，p^*_T より高い価格が最終時点に実現するか，また期間内に

（3）$p^*_Tq_0-\lambda p^*_Tq_0 = p_0q_0-c_0$

より，

$$p^*_T = (p_0q_0-c_0)／q_0(1-\lambda)$$

となる。

$$(p_0q_0+\lambda p_tq_0+\pi) \leqq p_tq_0 \qquad \text{(D)}$$

の価格が一度でも訪れるか，の予想が，保険契約を行うかどうかの判断材料である。

（C）と（D）より保険契約者となるかどうかの判断が行われるが，初期時点 0 に明確なのは，p_0，λ，c_0 であり，購入者が決定できるのは q_0，π であるが，予想しなければならないのは，期間内の p_t の動きと最終時点の p_T である。

2. 保険団体の保険期間終期の状況

証券購入者は期間内の p_t の動きと最終時点の p_T の予想によって保険契約を行うかどうかの判断を行うが，保険団体は期間内の p_t の動きと最終時点の p_T の予想によって先に c_0 を設定しなければならない[(4)]。このために以下では期間内の p_t の動きと最終時点の p_T の状況によって保険団体の損益がどのように変化するかを考える。

保険契約の行使が最終時点でのみ可能であれば，期間内は保険団体には何も義務は生じない。利益額 π と価格の動向によって最終時点に契約履行を請求する保険契約者がどの程度になるかを憶測するだけである。したがって最終時点のみが注目される。

保険期間の終期には，価格の状況によって保険契約者の履行請求が生じるかどうかが異なる。もし期間内に一度でも契約者が π の利益を生じる機会があれば，履行請求は行われず，c_0 の利益を得る。しかし期間内に π の利益を生じる機会がなければ，最終時点の履行請求は価格に依存する[(5)]。

（4）Pindyck（1988）は一般的な投資家がどの程度にリスクを嫌っているか，を検討し，相対的なリスク嫌悪指数（index of relative risk aversion）を測定している。もし正確なリスク嫌悪指数の測定が可能であれば，保険料の設定に有用な判断資料が得られると考えられる。

（5）Cecchetti, Cumby, and Figlewski（1988）は先物によるヘッジ（futures hedge）は一般に二つの問題，第一はリスクの最小化を重視し期待収益を考慮していない，第二は将来価格の時間的な変化等が酌量されていない，が存在する，とのべ，米国の 20 年財務省証券（20 year Treasury bonds）によって適正なヘッジの方法を例示している。購入者は保険契約のさいに保険料のコスト面だけではなく価格の動きや利益機会の可能性を十分配慮しなければならない。

最終時点 T の価格 p_T が

$$(p_0q_0+\lambda p_Tq_0+c_0) \leqq p_Tq_0$$

であれば，保険契約者は契約を実行することなく市場で売却するために，保険団体は c_0 の利益を得る。価格 p_T が

$$(p_0q_0+\lambda p_Tq_0) \leqq p_Tq_0 < (p_0q_0+\lambda p_Tq_0+c_0)$$

であれば，保険契約者は契約を実行することなく市場で売却し，

$$\{p_Tq_0-(p_0q_0+\lambda p_Tq_0+c_0)\}$$

の損失を生じるが，保険団体は c_0 の利益を得る。この価格帯のもとでのみ，契約者と保険団体の利害は異なる。

価格 p_T が

$$p_Tq_0 < (p_0q_0+\lambda p_Tq_0)$$

であれば，すなわち

$$p_Tq_0-\lambda p_Tq_0 < p_0q_0$$

であれば，保険契約者は契約を実行し，保険費用 c_0 の損失を生じる。このとき保険団体は受け取った証券をどのように処理するであろうか。

もし即座に市場で売却すれば，保険団体には

$$(p_Tq_0-\lambda p_Tq_0)-p_0q_0+c_0$$

の収支が生じるが，

$$\{(p_Tq_0-\lambda p_Tq_0)-p_0q_0+c_0\} \geqq 0$$

であれば，利益が，

$$\{(p_Tq_0-\lambda p_Tq_0)-p_0q_0+c_0\} < 0$$

であれば，損失が発生する。すなわち

$$(p_0q_0-c_0) \leqq (p_Tq_0-\lambda p_Tq_0) < p_0q_0$$

の価格帯であれば，保険契約者には $-c_0$ の損失が生じるが，保険団体には $\{(p_Tq_0-\lambda p_Tq_0)-p_0q_0+c_0\}$ の利益が生じる。しかし

$$(p_Tq_0-\lambda p_Tq_0) < p_0q_0-c_0 < p_0q_0$$

では，保険団体が即座に市場で売却すれば，$\{(p_Tq_0-\lambda p_Tq_0)-p_0q_0+c_0\}$ の損失

が発生する。したがって最初の時点で利益を生むと予想する最終時点の価格は保険契約者と保険団体で異なる。(6)

3. 保険金支払いの可能性

保険料は，①契約履行による損失額，②事務手数料，の二つの面から計算されるが，ここでは事務手数料の面は考慮せず，契約履行による損失額が保険料により補償される額を考える。また保険料の前受による終期までの利子所得等も考慮しない。したがって保険料計算の基礎は，証券の初期時点の価格と，保険期間全体の価格の動きの予測になる。(7)

3－1. 保険期間内の価格の動きによる可能性

保険期間内は契約者からの請求はないが，契約者が証券を売却する機会が生じるかどうかが保険料計算の一つの基準になる。価格が初期時点より一定額以上上昇すれば，その時点で契約は終了し，c_0の利益が発生する。契約者が売却するのは，期間内のある時点tに，

$$(p_0q_0+\lambda p_tq_0+c_0+\pi)\leqq p_tq_0$$

の状況が生じるときであるが，ここで問題はπがどのような値であるかを保険団体は事前に把握することができない点である。したがって期間内の価格の動きの予測(8)と同時にπの推定が契約者の売却可能性の判断材料になる。

（6）Dimson, and Marsh（2001）は1955年から2000年までの英国の株式，社債，金融債等の月ごとの収益を調査し，米国，ドイツ，日本等の収益と比較している。株式を長期に保有するさいには購入者に配当等の収益がプラスされるために，保険料コストはその分低下する。購入者は事前に将来の配当等の収益を十分に予測しておく必要がある。

（7）Grossman（1988）はオプションの保険機能を説明するなかで，原資産の将来価格の低下に原資産の購入者がどのように対応しようと考えているかによって売りつけ権としてのプット・オプションの価格が変化するために，オプション価格は購入者の心理の表現である，と述べている。すなわちある期間内に原資産が25％低下すれば権利を行使しようと考えるときと，50％低下しても依然原資産を保持し続けようとするときでは，オプション価格は大きく異なる。ここでは契約の終期の清算だけを仮定しているが，より広い保証の保険では，期間内や終期に購入者がどのように判断するかによって支払い希望保険料が異なることを留意する必要がある。

ここで保険料 c_0 と利益額 π が証券 1 単位について計算され，それぞれ $c_0 = \alpha q_0$, $\pi = \beta q_0$ と表示されるとすれば，売却可能な価格は，

$$(p_0 + \alpha + \beta) q_0 \leqq (1-\lambda) p_t q_0$$

であり，$q_0 > 0$ であるために，

$$(p_0 + \alpha + \beta) / (1-\lambda) \leqq p_t \tag{E}$$

となる価格の予測が問題になる。λ は外部で決められる定数であるが，$\alpha+\beta$ は保険団体と契約者が任意に設定する値であり，0 より大きい「未確定係数」である。

p_t が（E）の値になる可能性は，①保険期間 $T=1$ が長いほど，②手数料との差額 $(1-\lambda)$ が大きいほど，③保険料と利益額が小さいほど，大きくなる。このような価格は期間内に 1 度だけ瞬間的にでも実現すればよいために，期間内のすべての価格の可能性と期間内に 1 度だけ実現する可能性との比率が注目される。初期価格 p_0 を中心に価格が上下にランダムに動くと考えれば，購入者に利益が生じるには $p_t > p_0$ であるために，一般的には p_0 を中心とした価格の正規分布から，

$$(p_0 + \alpha + \beta) / (1-\lambda) > p_t$$

を除いた確率が，株式売却可能性の確率となる(9)。

3－1－1. 期間内の価格が安定していると予測されるとき

保険団体にとっては期間内に売却可能な価格が訪れない場合は最終時点に契

（8）Wilson, and Jones（2002）は Cowles 指数と S&P 500 指数を基礎に，1870 年から 1999 年までの株価と収益の指数を新たに推定している。市場全体の動きは個々の株価の動きに大きく影響するために，保険契約のさいには考慮しなければならない。

（9）Dokko, and Edelstein（1989）はフィラデルフィア・インクアイアー（Philadelphia Inquirer）やフィラデルフィア連邦準備銀行（Federal Reserve Bank of Philadelphia）で続けられてきた 40 から 60 名のエコノミストによる消費財価格，鉱工業生産，S&P 複合株式市場指数（Stabdard & Poors Composite Stock Market Index）等の予測値のアンケート調査であるリビングストン・サーベイ（Livingston Surveys）を分析し，株価の予測が可能かどうかを吟味している。正確な予測は困難でもより良い予測を絶えず求める努力を続けなければならないのが実情である。

約履行の義務が生じるために，初期時点 0 に p_0 にある価格が，期間内のある時点 t の時間まで売却可能な価格が一度も訪れない確率 $P(t)$ を求める。ここでは次のような状況を想定する。①確率 $P(t)$ は時間 t の長さにだけ依存する。②売却可能な価格が訪れる確率は Δt に比例する。③期間内の異なる時間間隔に対して売却可能な価格が訪れる可能性は互いに独立である。

このとき時間 Δt の間に売却可能な価格が訪れる確率は，②より

$$1-P(\Delta t)=a\Delta t$$

と表すことができる。a は非負の定数である[10]。ここでまず時点 $t+\Delta t$ まで売却可能な価格が訪れない状況の確率を求める。この状況が生じるためには，時間 t と Δt の異なる時間帯で売却可能な価格が訪れてはならない。したがって③の仮定と確率の乗法定理によって，

$$P(t+\Delta t)=P(t)P(\Delta t)=P(t)(1-a\Delta t)$$

が成立し，この関係から

$$\{P(t+\Delta t)-P(t)\}=-P(t)a\Delta t$$

$$\{P(t+\Delta t)-P(t)\}/\Delta t=-aP(t)$$

を得る。ここで Δt を 0 にまで近づければ，すなわち $\Delta t\to 0$ であれば，左右両辺の極限値として

$$dP(t)/dt=-aP(t)$$

が成立する。これは微分方程式であり，この解は

$$P(t)=Ae^{-at}$$

である。A は定数である。初期時点 0 には売却可能な価格が訪れる確率は 0 であるために，$P(0)=1$ であり，$A=1$ である。したがって

$$P(t)=e^{-at}。$$

この式から期間内の時点 t が長くなれば，売却可能な価格が訪れない確率はより

---

(10) 厳密には $(1-P(\Delta t))$ と $a\Delta t$ の微小な差異 $\delta(\Delta t)$ を考慮し

$$1-P(\Delta t)=a\Delta t+\delta(\Delta t)$$

と表される。しかしここでは簡単化のために $\delta(\Delta t)$ を除外している。

小さくなる。すなわち $t=T$ の期限が長くなれば，売却可能な価格が訪れる確率はより大きくなる。

この定式は $(1-P(\Delta t))=a\Delta t$ に示されるように，期間内の各時点で売却可能な価格が訪れない確率はすべて同一であることを前提にしている。すなわち期限内はどの時点でも価格の動きは初期価格を中心に同じような分布をしていることを想定している[(11)]。

3－1－2.　期間内の価格が上昇あるいは低下してゆくと予測されるとき

それでは価格が初期時点 0 から最終時点 T まで平均的に上昇傾向や下降傾向をたどると予想されるときは売却可能な価格が訪れない確率はどのような値になるであろうか。

このとき次のような仮定を設ける。①期間内の t から $t+\Delta t$ までの間に売却可能な価格が訪れる確率 $\Pi(t,\ t+\Delta t)$ は

$$\Pi(t,\ t+\Delta t)=a(t)\Delta t$$

と表される。$a(t)$ は非負の連続関数である。②売却可能な価格が訪れるかどうかは初期時点 0 までの状況に依存しない。③初期時点に売却可能な価格が訪れる確率は 0 である。

このとき期間内のある時点 t まで売却可能な価格が一度も訪れない確率を $P(t)$ と表せば，t 時点まで売却可能な価格が一度も訪れず，さらに $t+\Delta t$ まで売却可能な価格が一度も訪れない確率を $P(t+\Delta t|t)$ で表示すれば，確率の乗法定理より

$$P(t+\Delta t)=P(t)P(t+\Delta t|t) \tag{F}$$

が成り立つ。このとき①と②の仮定より，

(11) Harrison, and Zhang (1999) は株式の期待収益（expected stock returns）と株価の変動率（stock price volatility）の関連を分析し，3ヵ月から2年の期間では，リスクの高い変動率の大きな株式は高い収益をもたらす，と述べている。そうであれば，保険契約では高い変動率の株式は売却機会が増加し，また配当等の高い収益をもたらせば保険料コストの削減になるために，投資家はそのような株式を購入し，保険をかければ有利になるといえる。

$P(t+\Delta t|t)=1-\Pi(t,\ t+\Delta t)=1-a(t)\Delta t$ (G)

の関係が存在し，(G) を (F) に代入すれば，

$P(t+\Delta t)=P(t)(1-a(t)\Delta t)$ (H)

となる。

(H) より，

$\{P(t+\Delta t)-P(t)\}=-a(t)P(t)\Delta t$

$\{P(t+\Delta t)-P(t)\}/\Delta t=-a(t)P(t)$

であり，ここで $\Delta t\to 0$ にとれば，左右両辺の極限値として

$dP(t)/dt=-a(t)P(t)$ (I)

が成立する。これは微分方程式であり，この解は

$P(t)=A\exp(-\int_0^t a(\tau)d\tau)$ (J)

である。(12) A は定数である。初期時点 0 には売却可能な価格が訪れる確率は 0 であるために，$P(0)=1$ であり，$A=1$ である。したがって

$P(t)=\exp(-\int_0^t a(\tau)d\tau)$

である。

この式から，t 時点以前に売却可能な価格が訪れる確率は，

$1-P(t)=1-\exp(-\int_0^t a(\tau)d\tau)$

である。

期間内の t から $t+\Delta t$ までの間に売却可能な価格が訪れる確率 $\Pi(t,\ t+\Delta t)$ を決める非負の連続関数 $a(t)$ が，もし

$a(t)=\alpha+\beta t$

と予測されれば，

(12) (I) はまた $(1/P)(dP/dt)=-a(t)$ と表され，両辺を積分すると

$\log P=\int -a(\tau)d\tau+c$

であり，

$P=e^c\exp(\int -a(\tau)d\tau)$

となるが，$t=0$ で $P(0)=e^c=A$ と表されることができ，解は

$P=A\exp(-\int a(\tau)d\tau)$

となる。

$$P(t)=\exp(-\int_0^t(\alpha+\beta\tau)d\tau)$$

であり,

$$P(t)=\exp(-[\{\alpha t+(1/2)\beta t^2\}]_0^t)$$
$$=\exp(-\{\alpha t+(1/2)\beta t^2\})$$

から売却可能な価格が訪れない確率が得られる。

もし $a(t)$ が

$$a(t)=\alpha+\beta e^{\gamma t}$$

と予測されれば,

$$P(t)=\exp(-\int_0^t(\alpha+\beta e^{\gamma\tau})d\tau)$$

であり,

$$P(t)=\exp(-[\{\alpha t+(\beta/\gamma)e^{\gamma\tau}\}]_0^t)$$
$$=\exp(-\alpha t-(\beta/\gamma)(e^{\gamma t}-1))$$

から売却可能な価格が訪れない確率が得られる。(13)

3−1−3. c_0 と π の差異による売却可能な価格が訪れる確率

c_0 や π の値が異なれば,売却可能な価格が訪れる確率は異なる。

$$(p_0q_0+\lambda p_tq_0+c_0+\pi)\leqq p_tq_0$$

となる p_t は,保険団体が設定する c_0 によって異なるために,非負の定数 a や連続関数 $a(t)$ は,ある範囲内で保険団体自身が設定する変数である。例えば三種類の保険料 c_{01}, c_{02}, c_{03} について,

$$c_{01}<c_{02}<c_{03}$$

であれば,それぞれに対応する非負の定数 a_1, a_2, a_3 は,

$$a_3<a_2<a_1$$

であると考えられる。

(13) Fama and French (2000) は,利潤率はすべての産業内や産業間で平均値に近づいて行く (mean reverting) 傾向があるかどうかを分析している。自由競争の原則であると考えられているが,利益率の高い企業の株式はやがて利益率が低下し,高い株価も低下して行くのであろうか。配当等の購入者の収益と総合して注目すべき点である。

同様に π について，

$$\pi_1 < \pi_2 < \pi_3$$

であれば，それぞれに対応する非負の定数 a_1，a_2，a_3 は，

$$a_3 < a_2 < a_1$$

であると考えられる。

したがって c_{01}，c_{02}，c_{03} や π_1，π_2，π_3 等について異なる確率 $P(t)$ をいくつか予測し，適切な c_0 を設定しなければならない[(14)]。

3－2. 保険期間終期の価格の動きによる可能性

保険期間終期には価格の状況によって保険請求が生じるが，保険請求発生の可能性は，期間内と同様に c_0 や π の値によって異なる。

3－2－1. 期間内の価格が安定していると予測されるとき

期間内の価格が安定していると予測されるときは

$$P(t) = e^{-at} \tag{K}$$

から売却可能な価格が訪れない確率が予測される。a は初期時点に c_0 や π が設定や推定された後には，具体的な値が指定されている。この（K）に $t = T$ を代入すれば，期間内に売却可能な価格が訪れない確率は，

$$P(t) = e^{-aT}$$

と計算される。しかしこの確率は，

$$p_T q_0 < (p_0 q_0 + \lambda p_T q_0 + c_0 + \pi)$$

となる確率であり，この範囲内ですべて請求が発生するとはいえない。すなわ

---

(14) Barberis（2000）は，収益についてある程度正確な予測可能性が存在すれば，投資家は短期と長期で市場での行動をどのように変えるか，また長期で投資期間がより長くなれば株式への選択が重視されるかどうか，を検討している。保険契約は損失の最高限界を保険料に設定するために，利益取得により高い可能性を保証することになり，利益確保の予測可能性を高める。保険期間，保険料，利益確保の可能性，三者の相互関係の吟味は今後の興味深い課題である。

ち価格 p_T が,

$$(p_0q_0+\lambda p_Tq_0) \leqq p_Tq_0 < (p_0q_0+\lambda p_Tq_0+c_0)$$

でも，保険契約者は契約を実行することなく市場で売却するために，請求が発生する確率 $p^*(T)$ は,

$$p^*(T) < P(T) = e^{-aT}$$

であり，$p^*(T)$ は $p_Tq_0 < (p_0q_0+\lambda p_Tq_0)$ となる価格に対応する確率であり，このときの定数 a を a^* と表せば，$a < a^*$ であり,

$$p^*(T) = \exp(-a^*T) < P(T) = e^{-aT}$$

となる。すなわち最終時点 T に保険請求が発生する確率 $P^*(T) = \exp(-a^*T)$ は，保険料 c_0 の大きさによって，期間内に売却されない確率の計算式 $P(T) = e^{-aT}$ によって得た値より，小さくなる。

3−2−2. 期間内の価格が上昇あるいは低下してゆくと予測されるとき

それでは価格が初期時点 0 から最終時点 T まで平均的に上昇傾向や下降傾向をたどると予想されるときはどうであろうか。

このとき期間内に売却可能な価格が訪れない確率は,

$$P(t) = \exp(-\int_0^t a(\tau)d\tau)$$

と計算される。しかしこの確率は，上記と同様に,

$$p_Tq_0 < (p_0q_0+\lambda p_Tq_0+c_0+\pi)$$

となる確率であり，この範囲内ですべて請求が発生するとはいえない。すなわち価格 p_T が,

$$(p_0q_0+\lambda p_Tq_0) \leqq p_Tq_0 < (p_0q_0+\lambda p_Tq_0+c_0)$$

でも，保険契約者は契約を実行することなく市場で売却するために，請求が発生する確率 $P^*(T)$ は,

$$P^*(T) < P(T)$$

であり，$P^*(T)$ は $p_Tq_0 < (p_0q_0+\lambda p_Tq_0)$ となる価格に対応する確率であり，このときの定数 $a(T)$ を $a^*(T)$ と表せば，$a(T) < a^*(T)$ であり,

$P^*(T) = \exp(-\int_0^t a^*(\tau)d\tau) < P(T) = \exp(-\int_0^t a(\tau)d\tau)$

となる。すなわち最終時点 T に保険請求が発生する確率 $P^*(T)$ は，保険料 c_0 が正の値であるために，期間内に売却されない確率の計算式 $P(T)$ によって得た値より小さくなる。

3－2－3. 保険金支払い確率の計算

それでは最終時点まで保険契約者が証券を市場で売却できない確率は具体的にどのような値になるであろうか。また最終時点に保険契約者が証券を市場で売却せず，保険金を請求する確率はどうであろうか。一例として，a に 0.1，0.2，0.3，それに対応する a^* にそれぞれ 0.15，0.25，0.35，最終時点 T に 1，2，3，4，5，6，7，8 を仮定して，最終時点の確率を計算すれば，以下のようになる。

T	1	2	3	4	5	6	7	8
$a = 0.1$	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493
$a^* = 0.15$	0.8607	0.7408	0.6376	0.5488	0.4724	0.4066	0.3499	0.3012
$a = 0.2$	0.8187	0.6703	0.5488	0.4493	0.3679	0.3012	0.2466	0.2019
$a^* = 0.25$	0.7788	0.7855	0.4724	0.3679	0.2865	0.2231	0.1738	0.1353
$a = 0.3$	0.7408	0.5488	0.4066	0.3012	0.2231	0.1653	0.1225	0.1653
$a^* = 0.35$	0.7047	0.4966	0.3499	0.2466	0.1738	0.1225	0.0863	0.0608

この結果から保険請求ができる最終時点 T が長くなれば，証券をそれまで売却せず保持している確率と最終時点に保険金を請求する確率が小さくなる，ことが示されている。最終時点までの期間が長くなれば，その間に証券売却の機会が訪れる可能性が高くなるためである。最終時点でしか保険金を請求できない場合は，期間 T の長い保険ほど保険請求の可能性が低くなるために，保険料も低く設定しなければならないことがわかる。

参考文献

Bakshi, Gurdip, Charles Cao, and Zhiwu Chen, “Pricing and Hedging Long-Term Options”, Journal of Econometrics, 94(2000), 277–318.

Barberis, Nicholas, “Investing for the Long Run When Returns are Predictable”, Journal of Finance, 55(2000), 225–264.

Black, Fischer and Myron Scholes, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, Journal of Political Economy, 81(1973), 637–54.

Broughton, John B. and Don M. Chance, “The Value Line Enigma Extended: An Examination of the Performance of Option Recommendations”, Journal of Business, 66(1993), 541–69.

Cecchetti, Stephen G., Robert E. Cumby, and Stephen Figlewski, “Estimation of the Optimal Futures Hedge”, Review of Economics and Statistics, 70(1988), 623–630.

Conrad, Jennifer, “The Price Effect of Option Introduction”, Journal of Finance, 44(1989), 487–98.

Dimson, Elroy, and Paul Marsh, “U.K. Financial Market Returns, 1955-2000”, Journal of Business, 74(2001), 1–31.

Dokko, Yoon and Robert H. Edelstein, “How Well Do Economists Forecast Stock Market Prices? A Study of the Livingston Surveys”, American Economic Review, 79(1989), 865–71.

Fama, Eugene F. and Kenneth R. French, “Forecasting Profitability and Earnings”, Journal of Business, 73(2000), 161–75.

Grinblatt, Mark, and Matti Keloharju, “What Makes Investors Trade?”, Journal of Finance, 56(2001), 589–616.

Grossman, Sanford J., “An Analysis of the Implications for Stock and Futures Price Volatility of Program Trading and Dynamic Hedging Strategies”, Journal of Business, 61 (1988), 275–98.

Harrison, Paul, and Harold H. Zhang, “An Investigation of the Risk and Return Relation at Long Horizons”, Review of Economics and Statistics, 81(1999), 399–408.

Pindyck, Robert S., “Risk Aversion and Determinants of Stock Market Behavior”, Review of Economics and Statistics), 70(1988), 183–190.

Quigg, Laura, “Empirical Testing of Real Option-Pricing models”, Journal of Finance, 48(1993), 621–40.

Sorescu, Sorin M., “The Effect of Options on Stock Prices: 1973 to 1995”, Journal of Finance, 55(2000), 487–514.

Wilson, Jack W., and Charles P. Jones, “An Analysis of the S&P 500 Index and Cowless Extensions: Price Indexes and Stock Returns, 1870-1999”, Journal of Business, 75(2002), 505–33.